

Empirical Mode Decomposition

$f(t)$ – исходный сигнал

EMD представляет собой разложение следующего вида:

$$f(t) = r(t) + \sum_{i=1}^N \psi_i(t)$$

$r(t)$ – некая монотонная функция, называемая остатком

$\psi_i(t)$ – множество функций различной частоты, называемых Intrinsic Mode Function (IMF)

- Особенность: для разложения не используется фиксированный базис.
 $\psi_i(t)$ и $r(t)$ определяются самим сигналом.

Определение IMF

Будем называть функцию Intrinsic Mode Function, если:

1. Количество локальных экстремумов не более чем на единицу отличается от количества нулей функции на рассматриваемом промежутке.
2. Значение полусуммы огибающих данной функции близко к нулю.

Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = s(t)

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not
monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local maxima}$

of I_i

$L(t) = \text{spline through local minima}$

of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

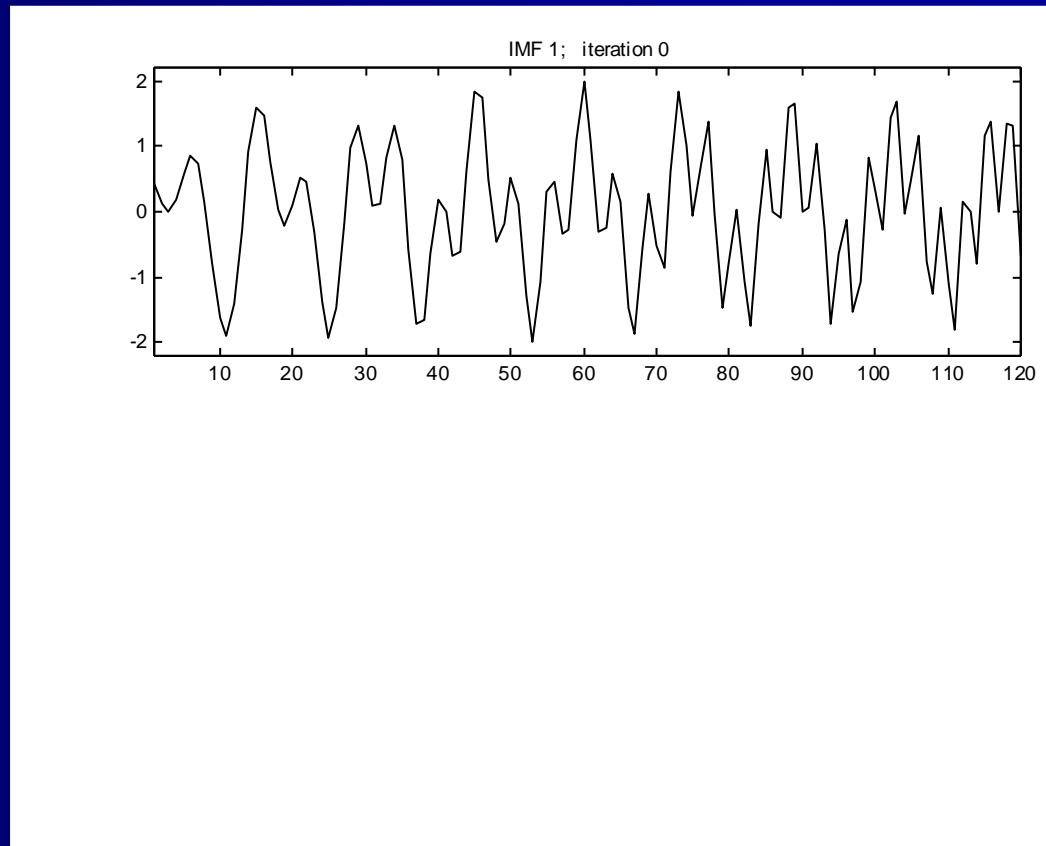
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

**$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$**

$L(t) = \text{spline through local minima of}$

I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

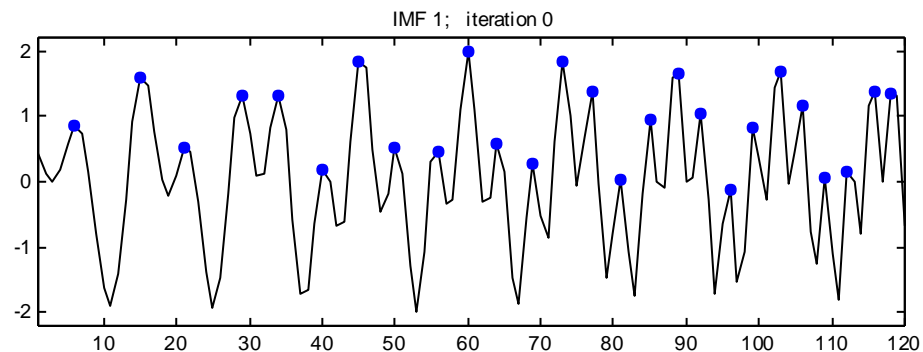
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

**$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$**

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

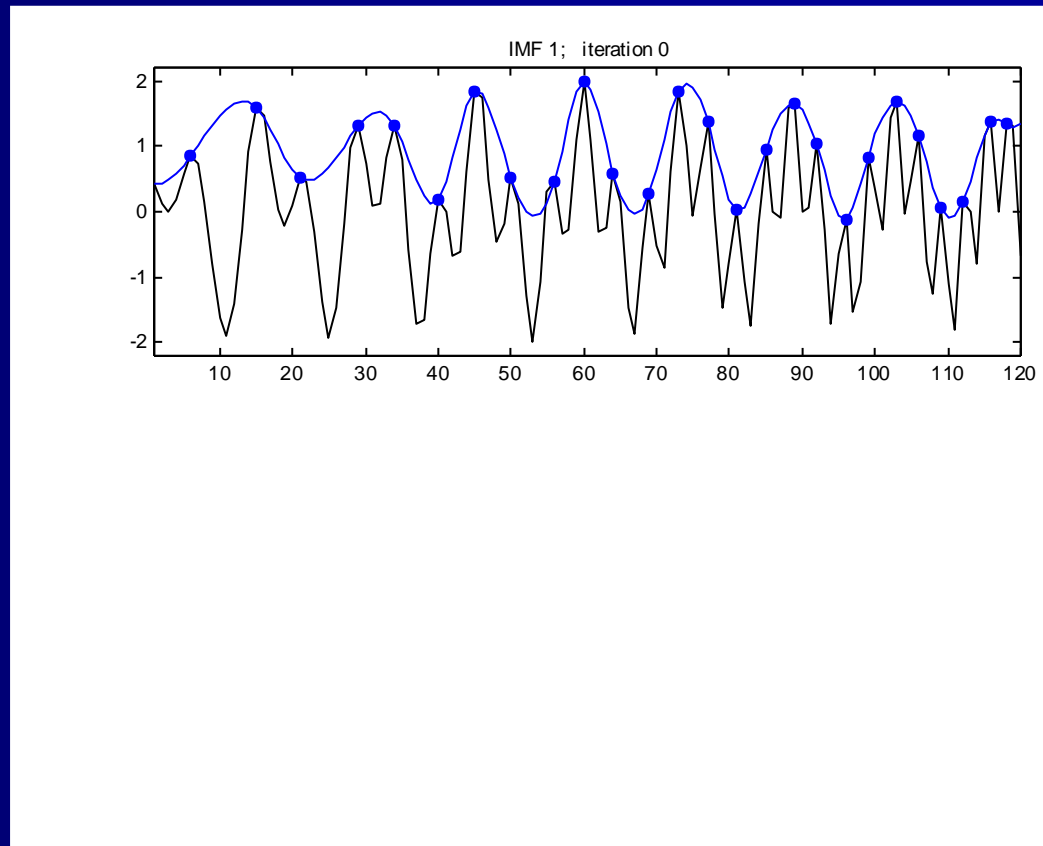
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

**$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$**

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

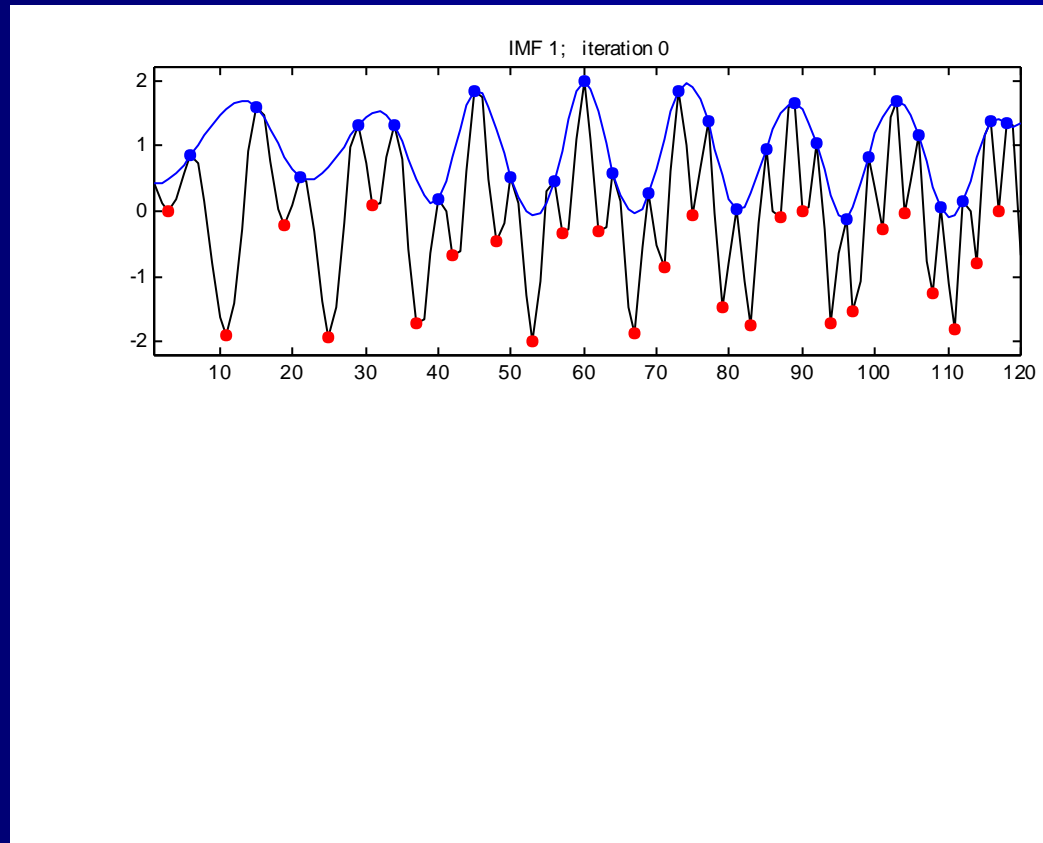
end

$\text{IMF}_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

**$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$**

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

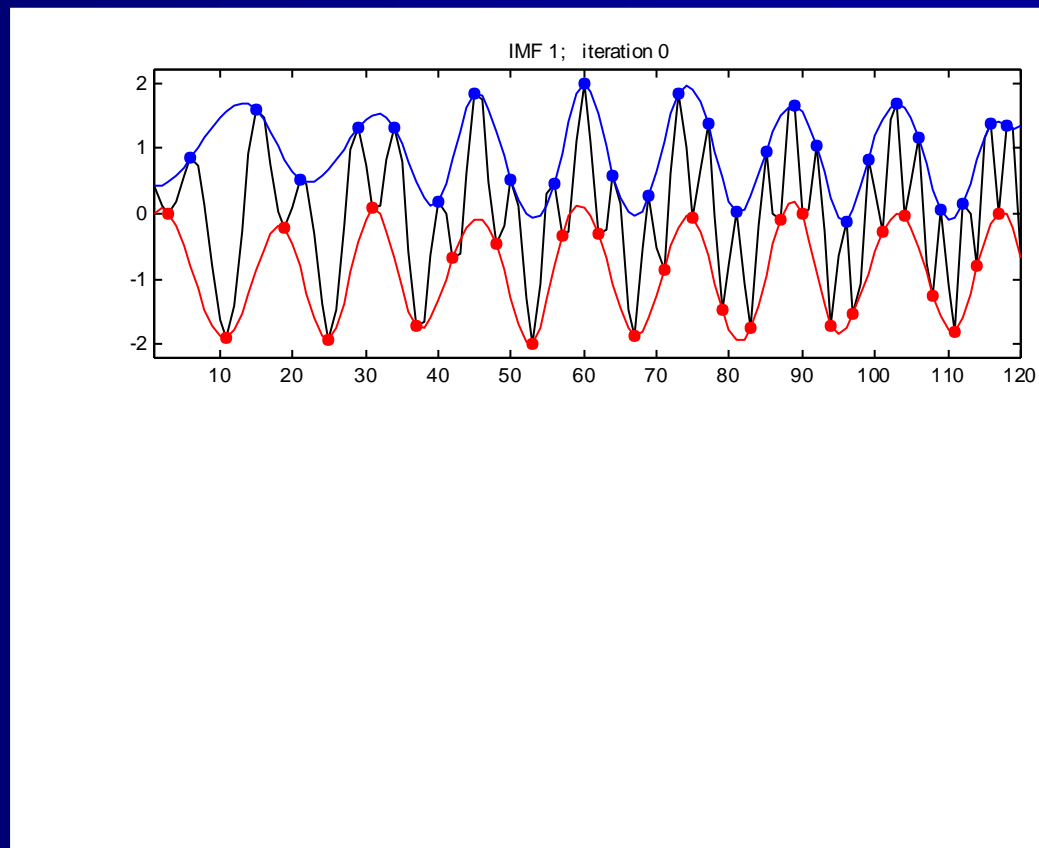
end

$\text{IMF}_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

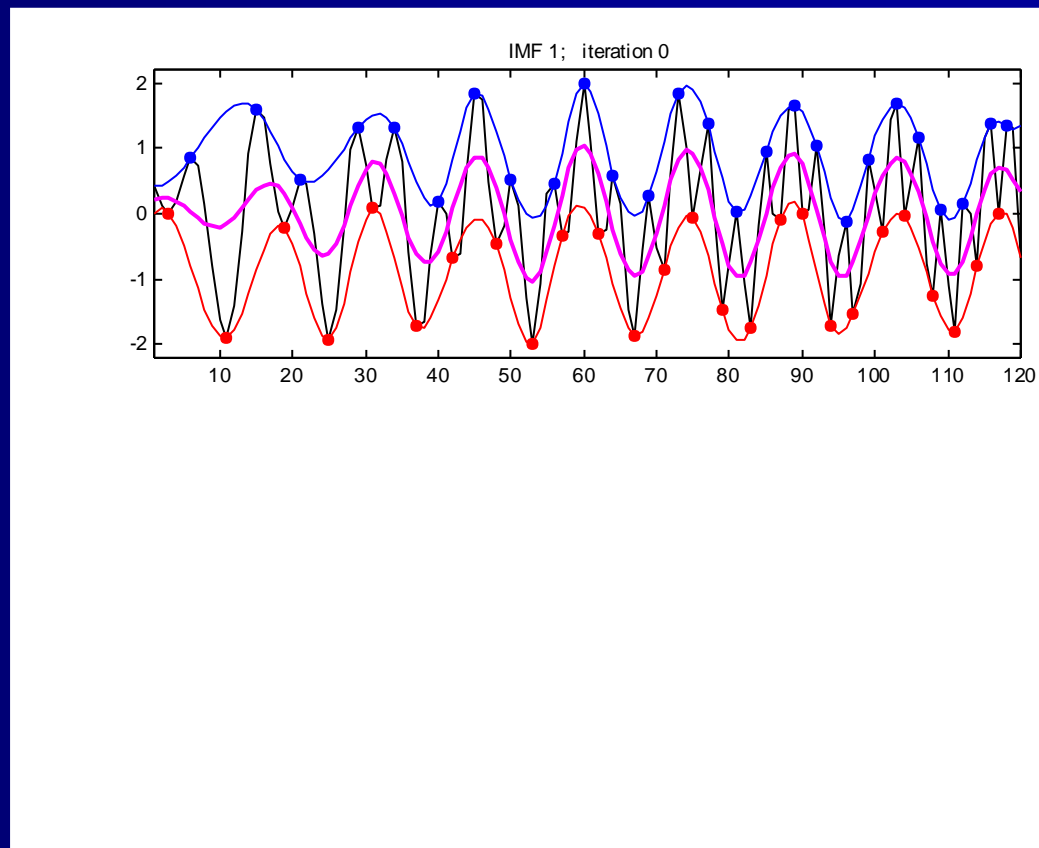
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local}$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local}$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$ ("residue") →

$i = i + 1$

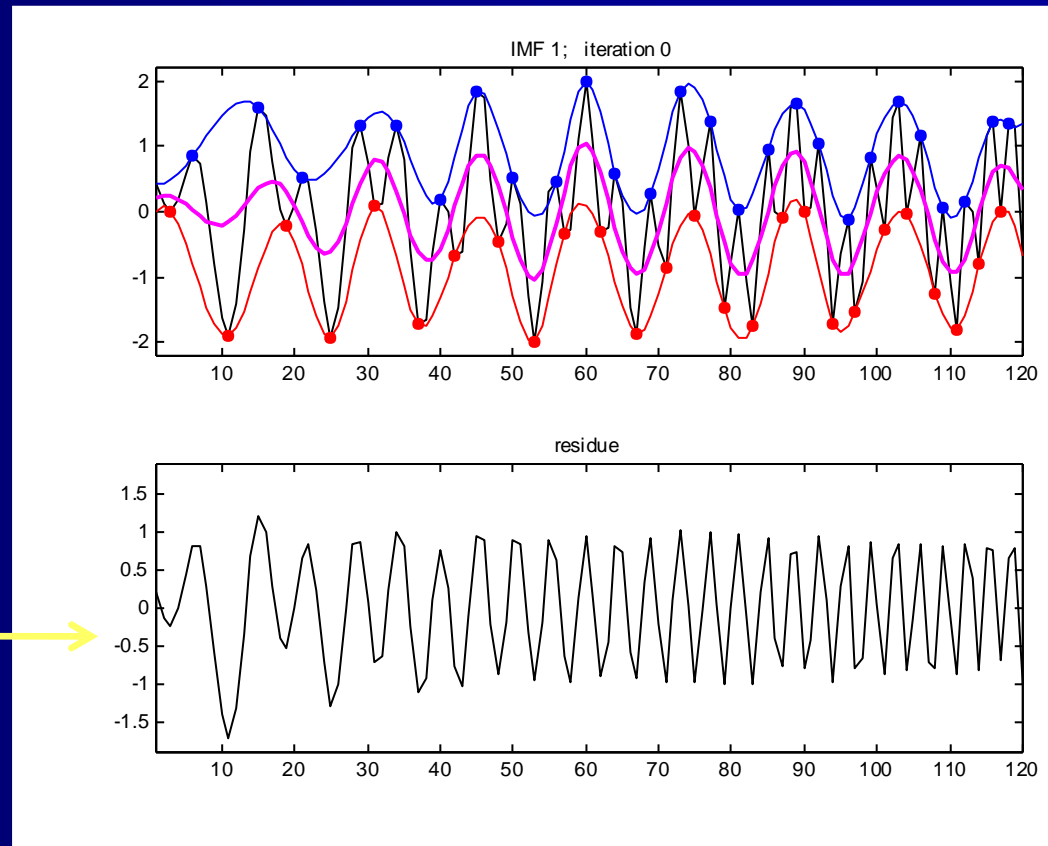
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

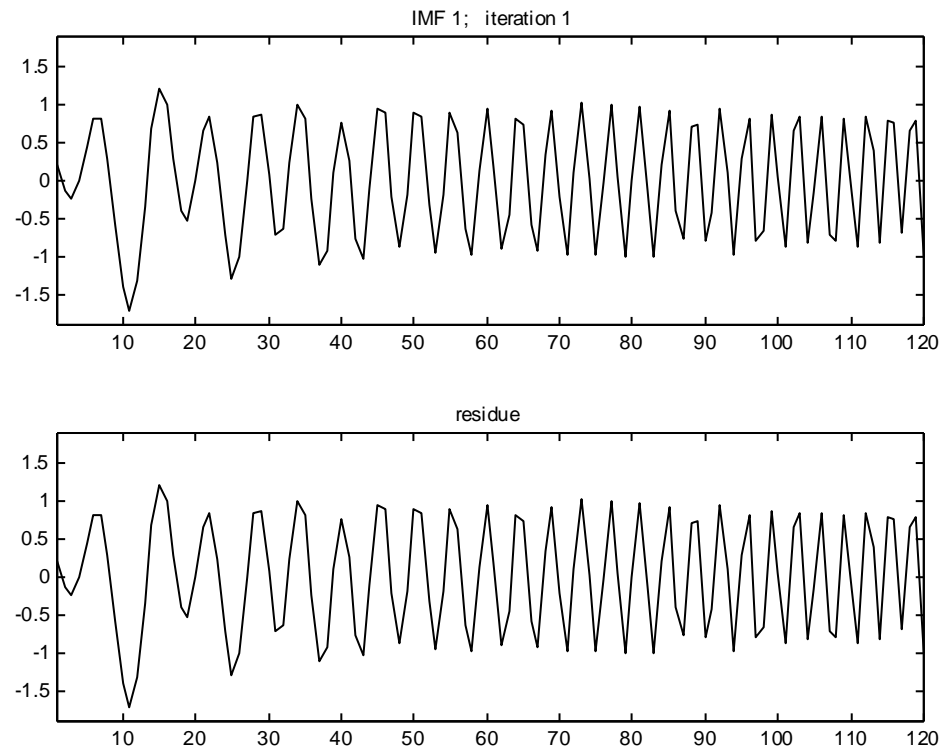
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

**$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$**

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

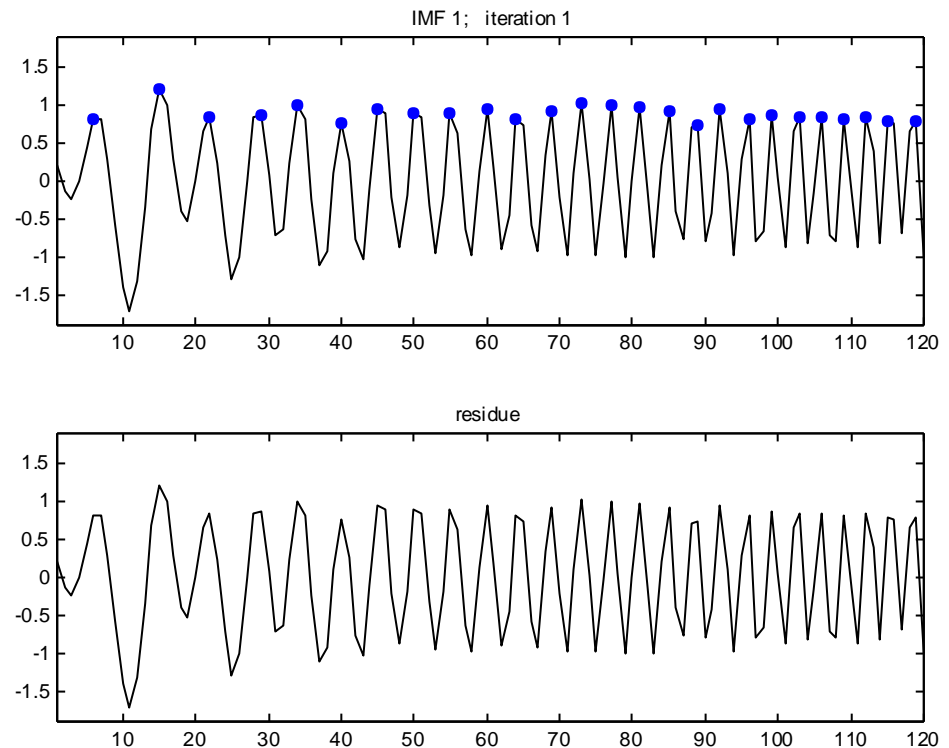
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

**$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$**

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

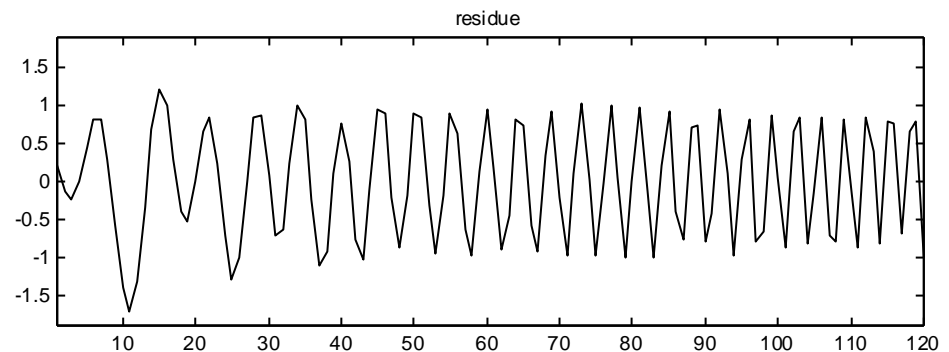
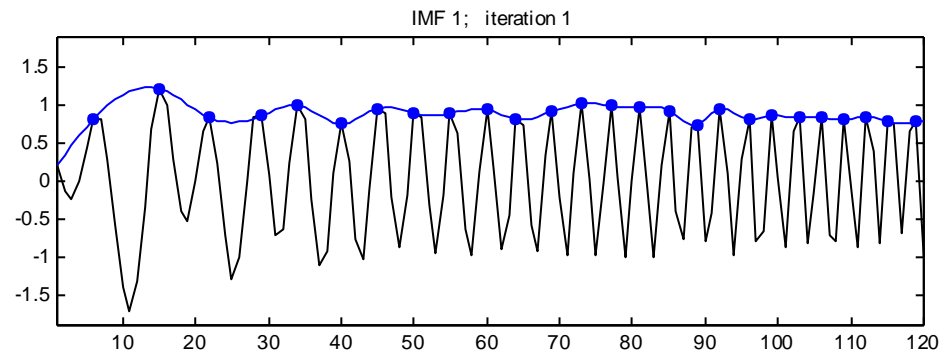
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local}$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local}$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

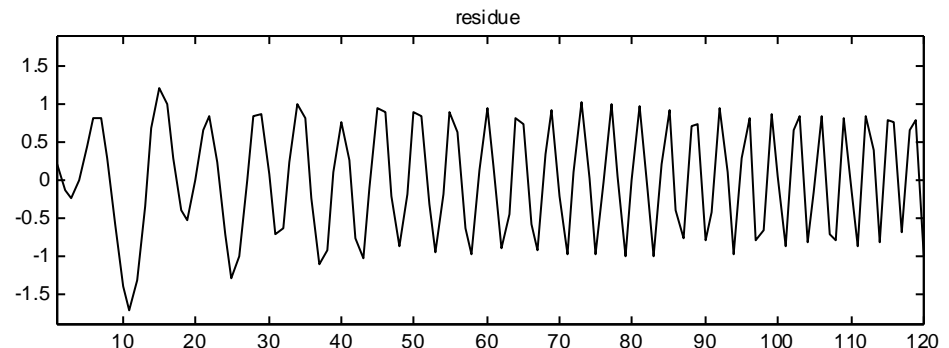
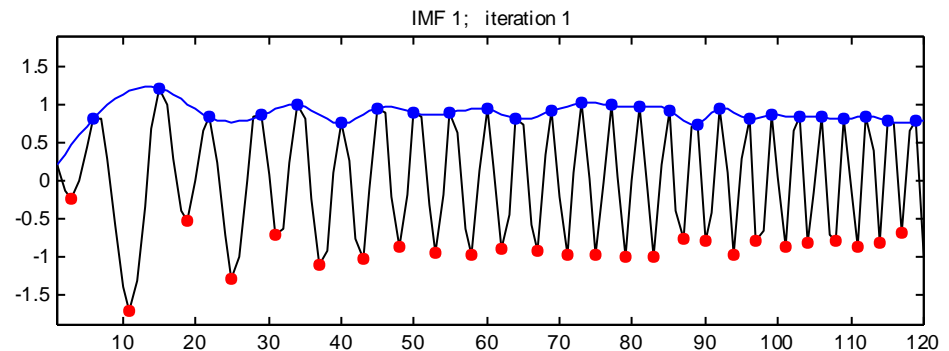
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

**$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$**

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

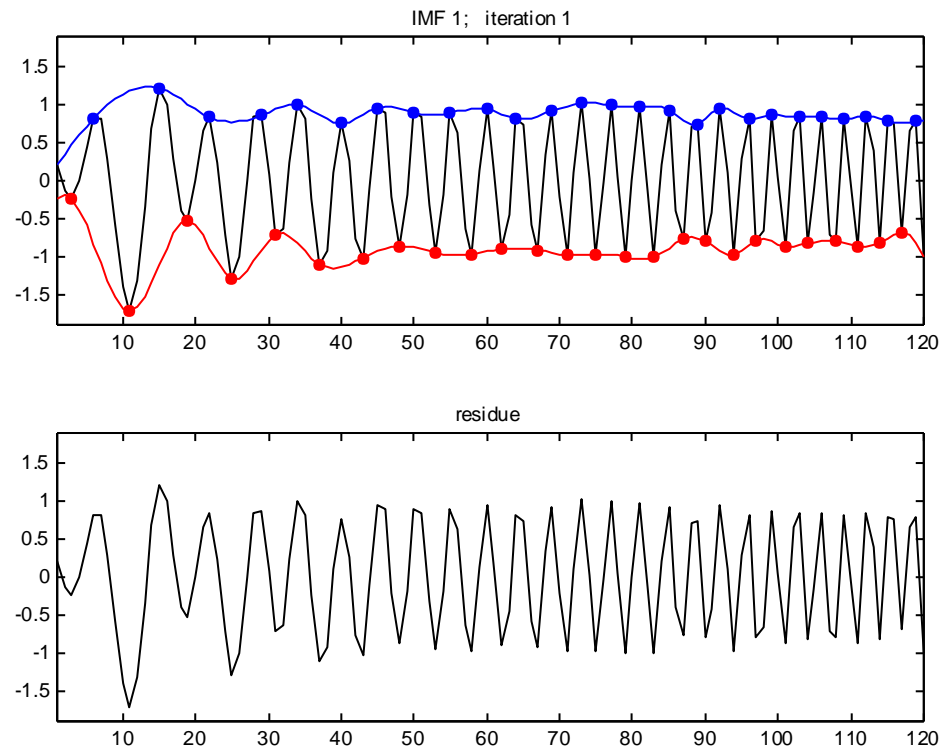
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

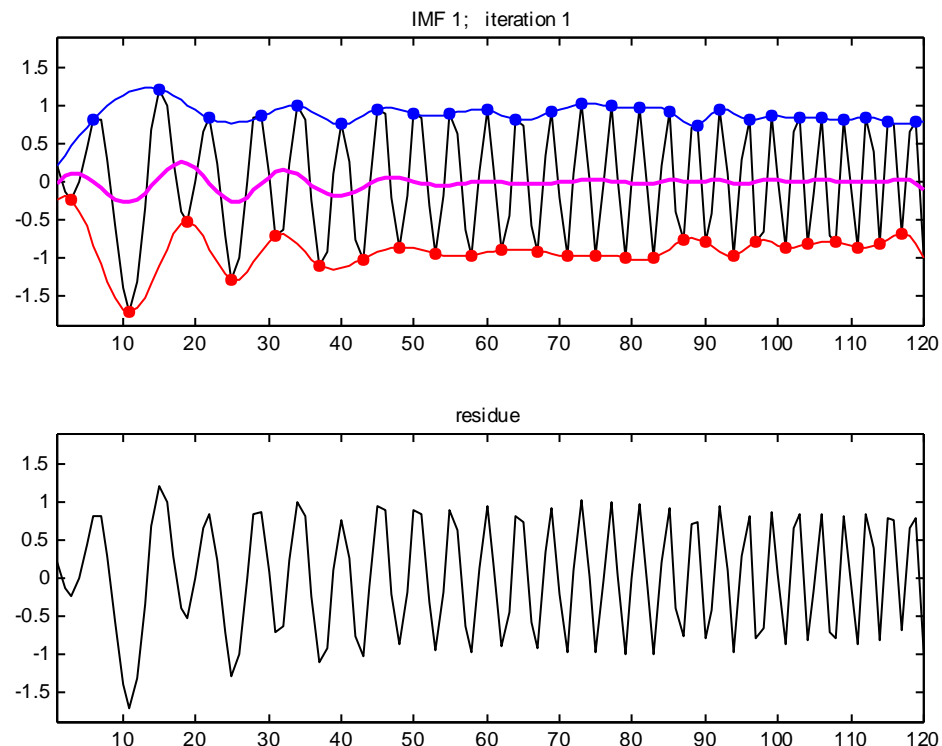
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$ ("residue") →

$i = i + 1$

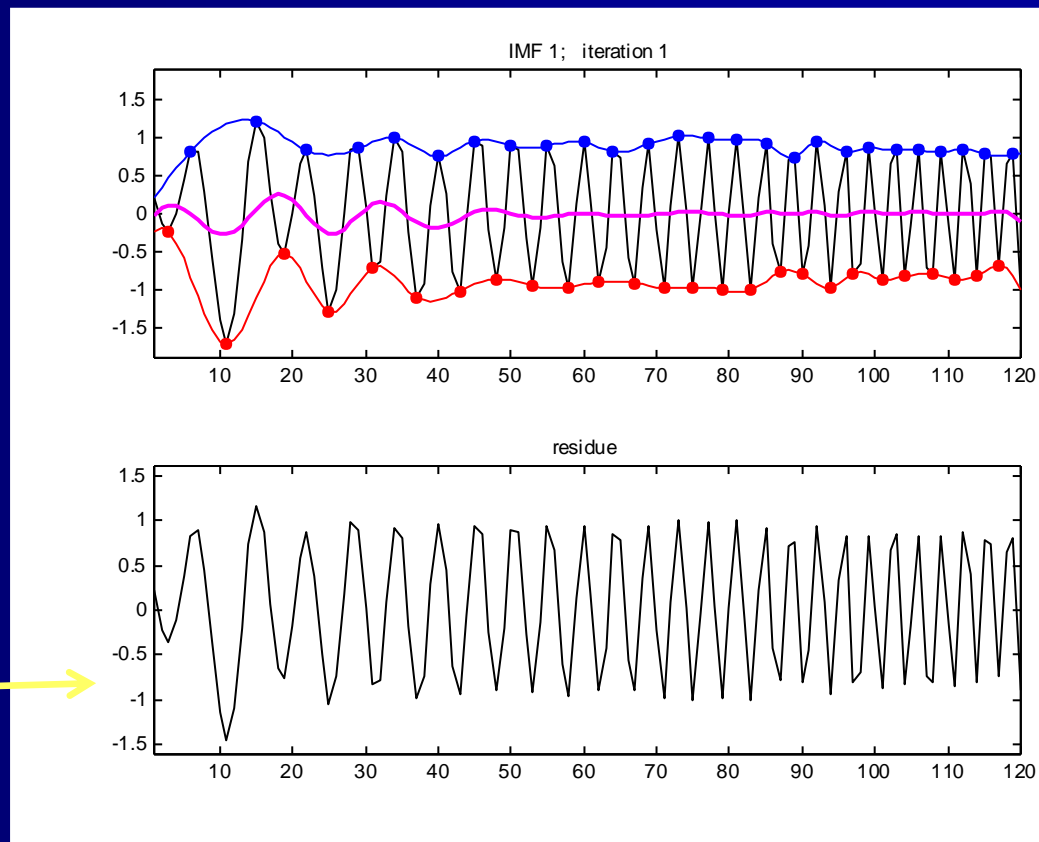
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

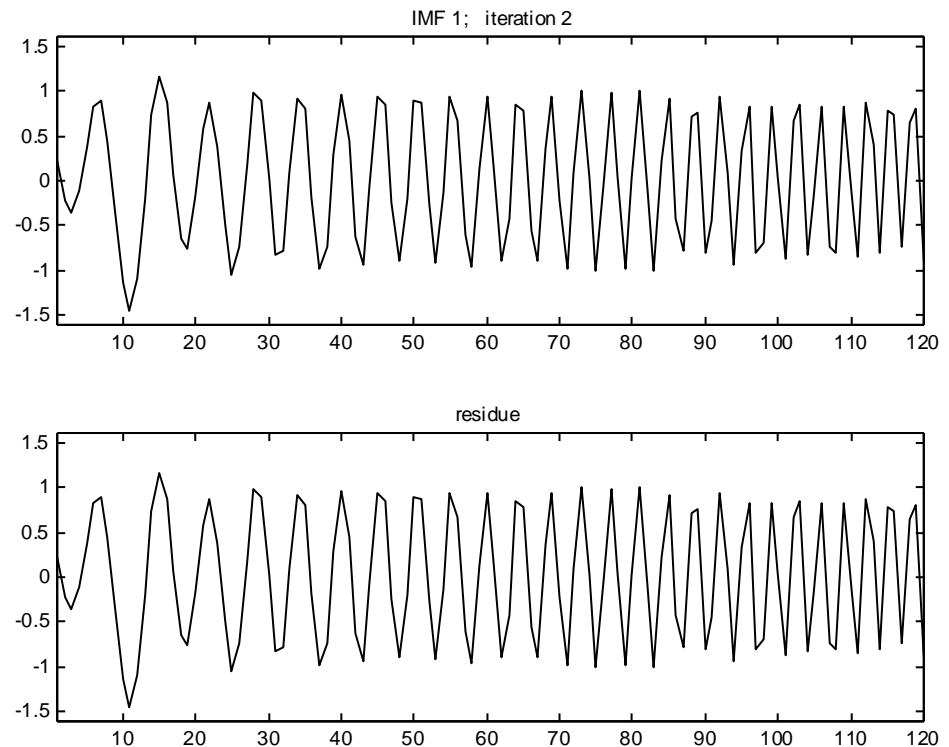
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

**$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$**

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

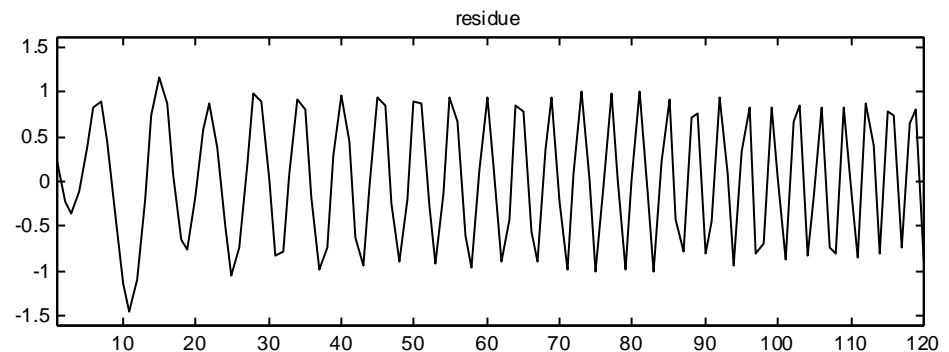
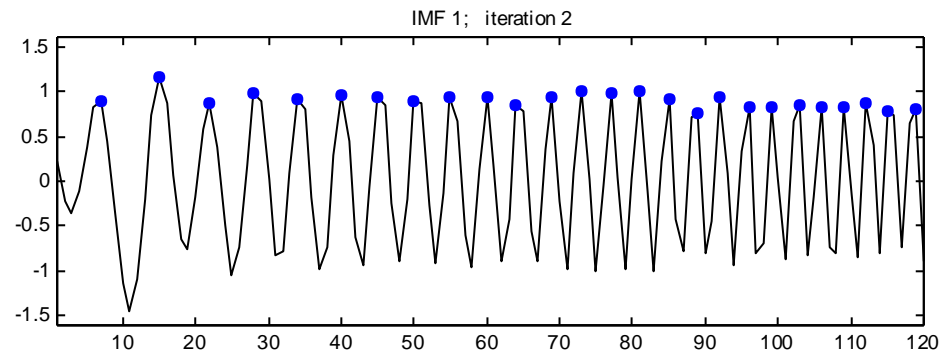
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

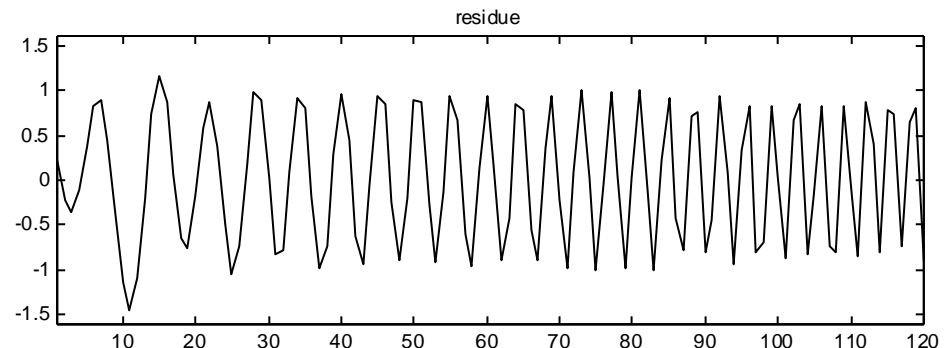
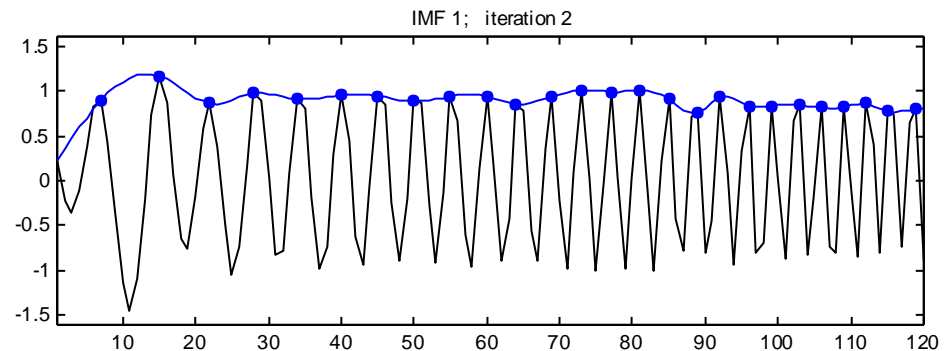
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local}$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local}$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

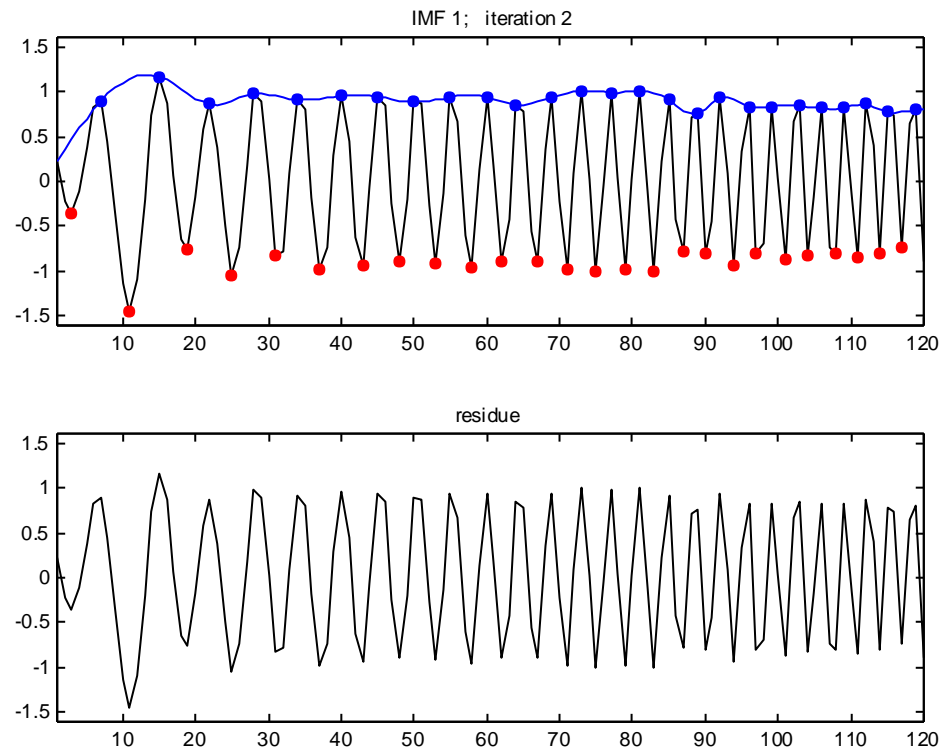
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

**$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$**

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

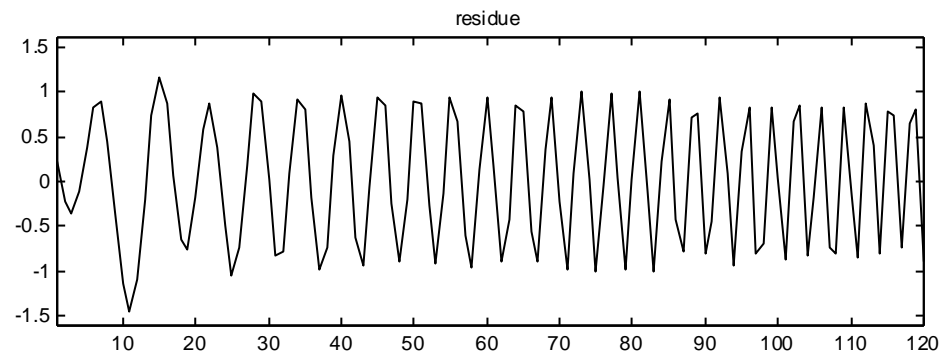
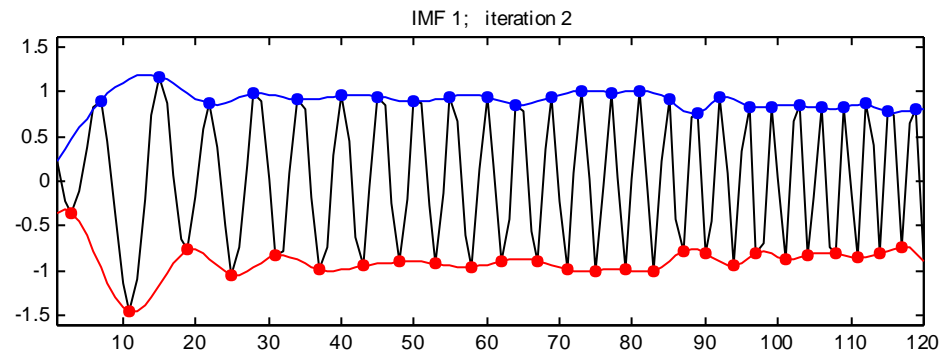
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

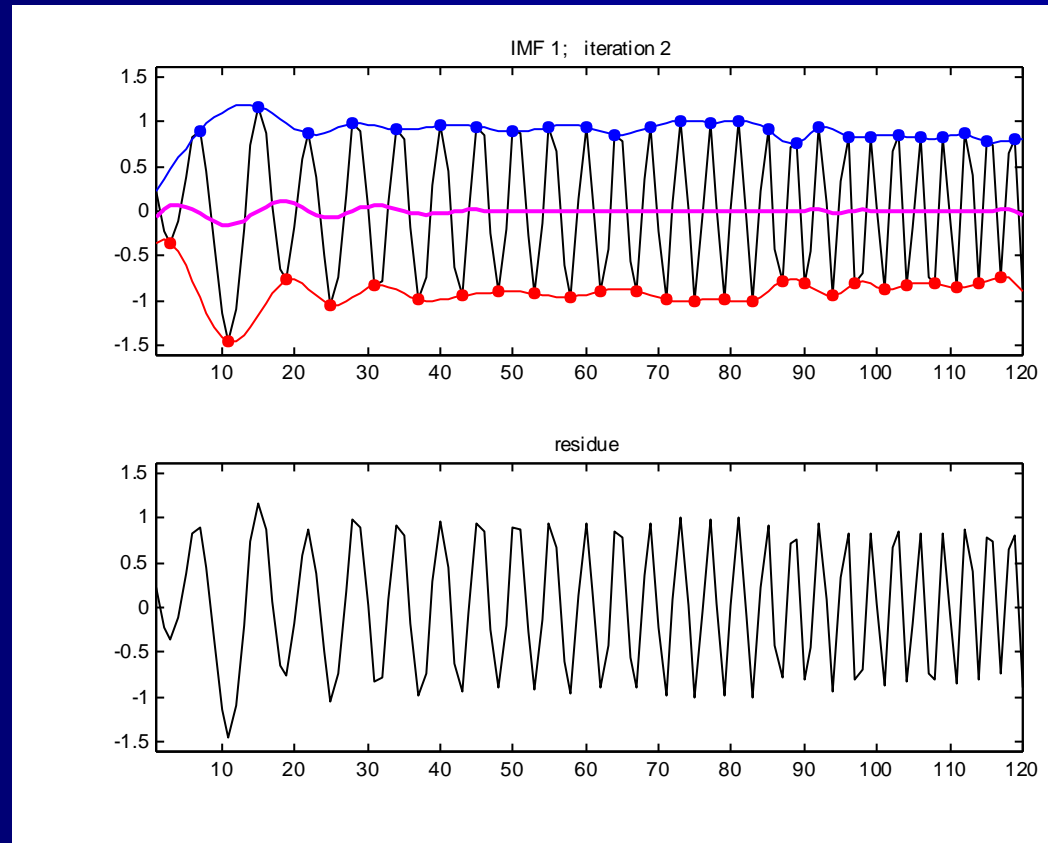
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

**while Residue not equal zero or not
monotone**

**while I_i has non-negligible local
mean**

$U(t) = \text{spline through local
maxima of } I_i$

$L(t) = \text{spline through local
minima of } I_i$

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$ ("residue") →

$i = i + 1$

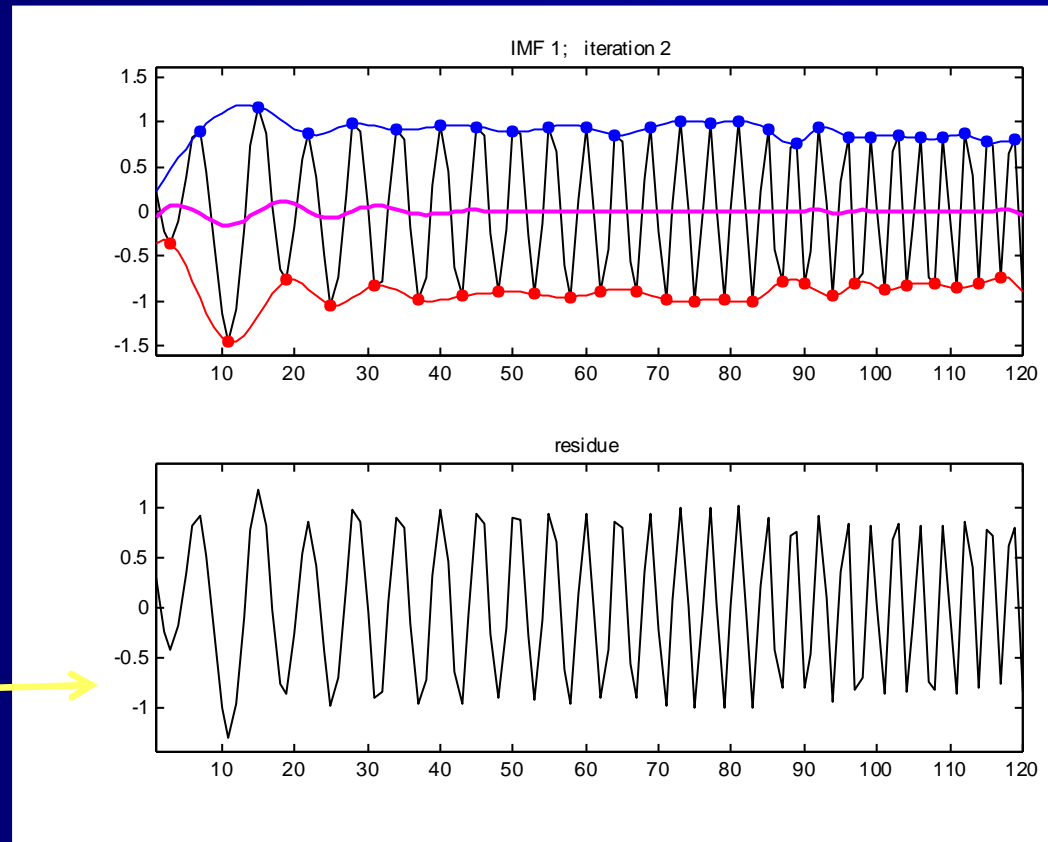
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

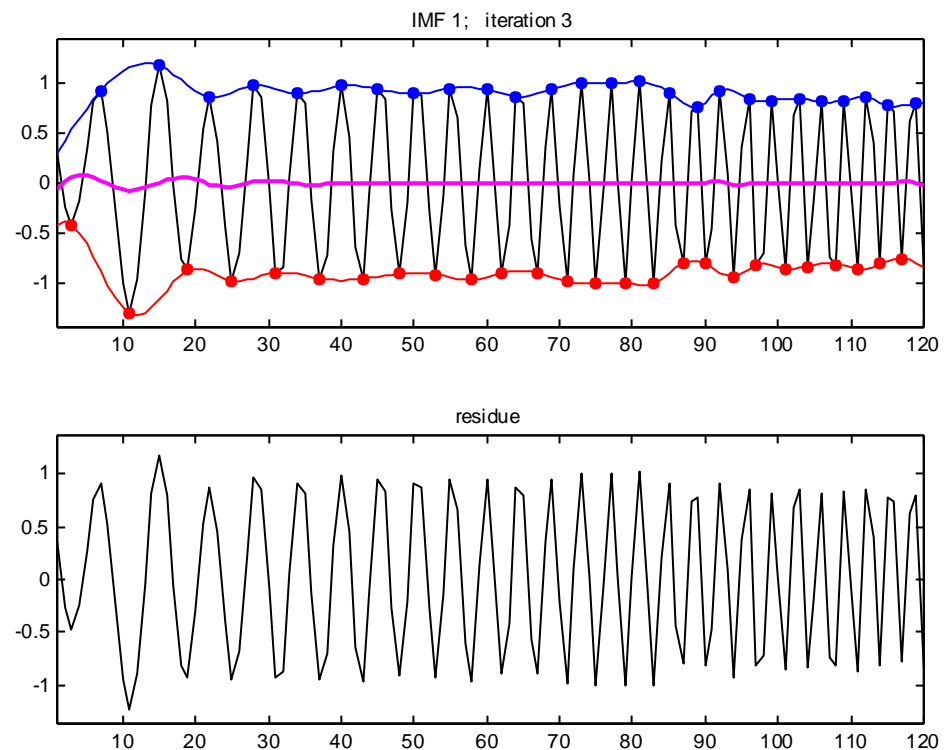
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

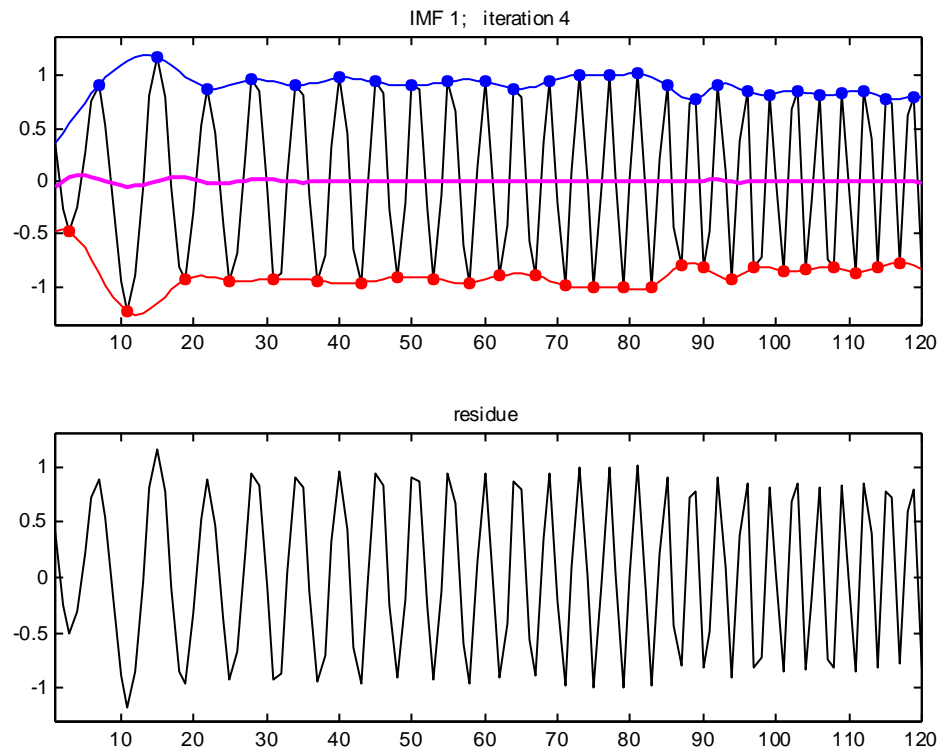
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

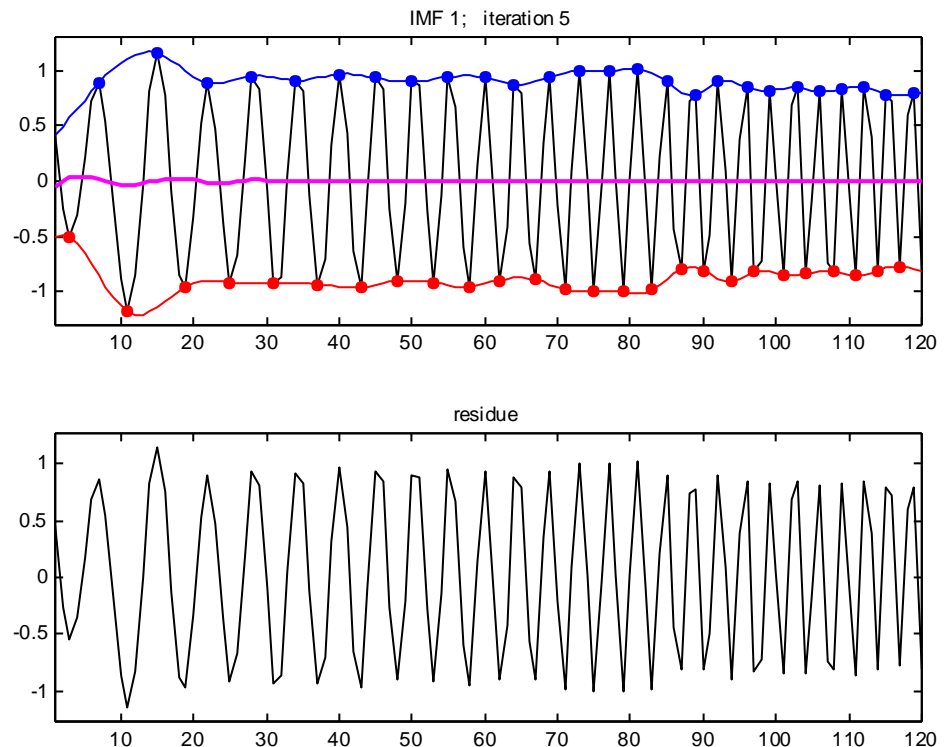
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

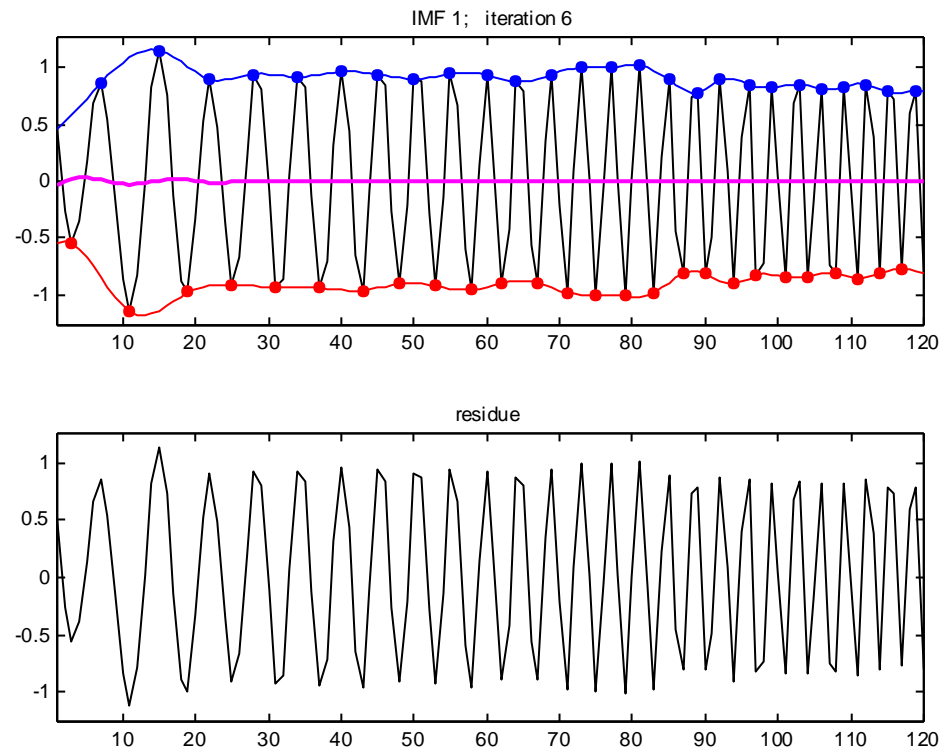
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

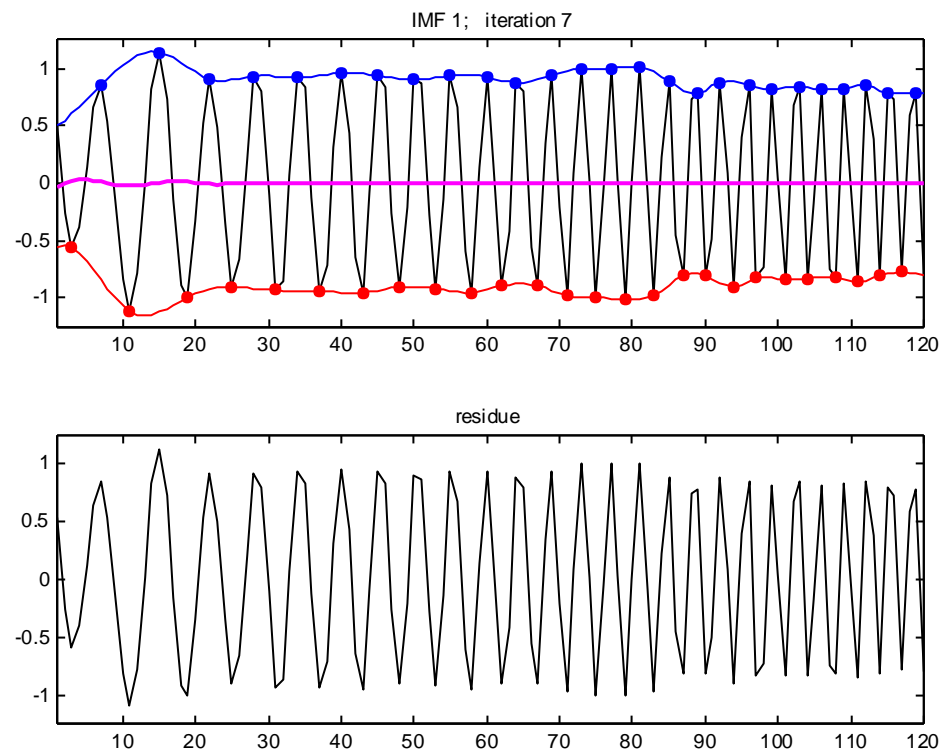
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k+1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local$

maxima of I_i

$L(t) = \text{spline through local$

minima of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

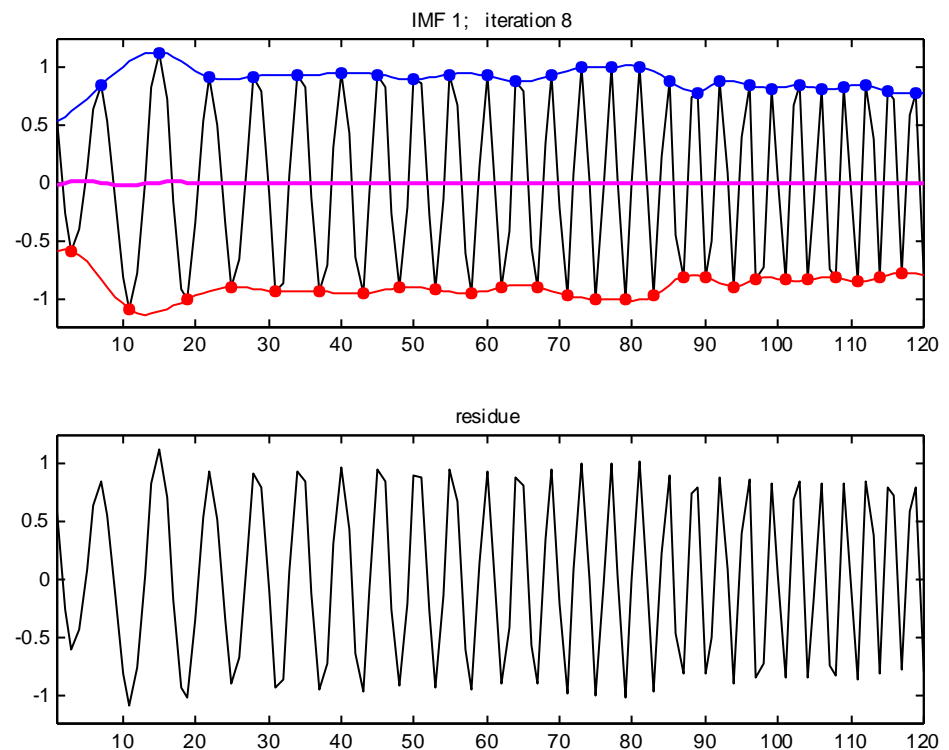
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

end



Получение разложения. Процесс отсеивания (sifting)

Residue = $s(t)$

$I_1(t) = \text{Residue}$

$i = 1$

$k = 1$

while Residue not equal zero or not
monotone

while I_i has non-negligible local mean

$U(t) = \text{spline through local maxima}$

of I_i

$L(t) = \text{spline through local minima}$

of I_i

$Av(t) = 1/2 (U(t) + L(t))$

$I_i(t) = I_i(t) - Av(t)$

$i = i + 1$

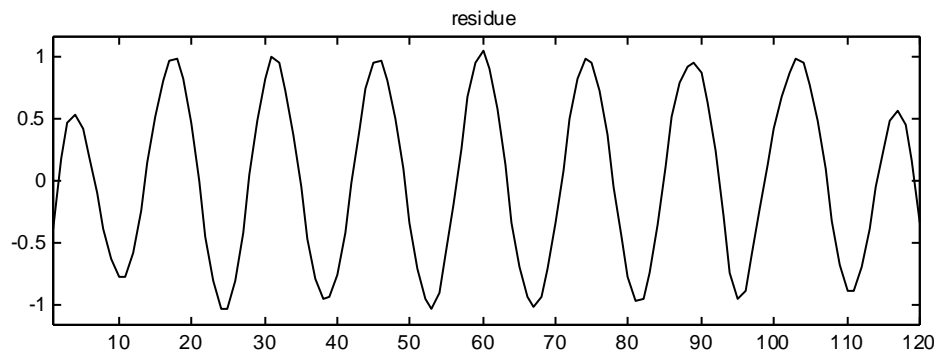
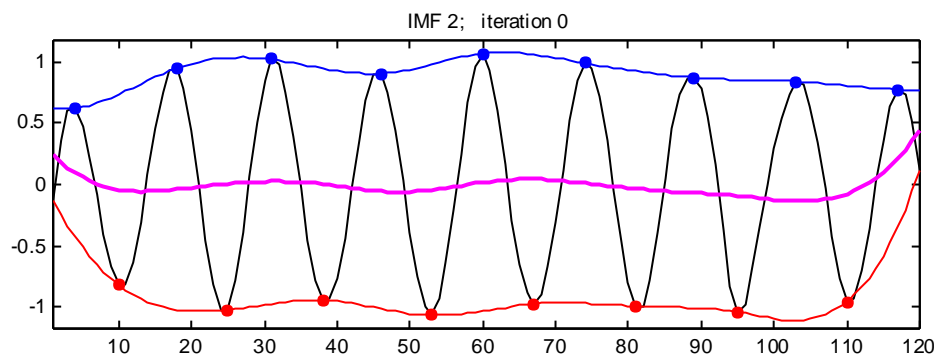
end

$IMF_k(t) = I_i(t)$

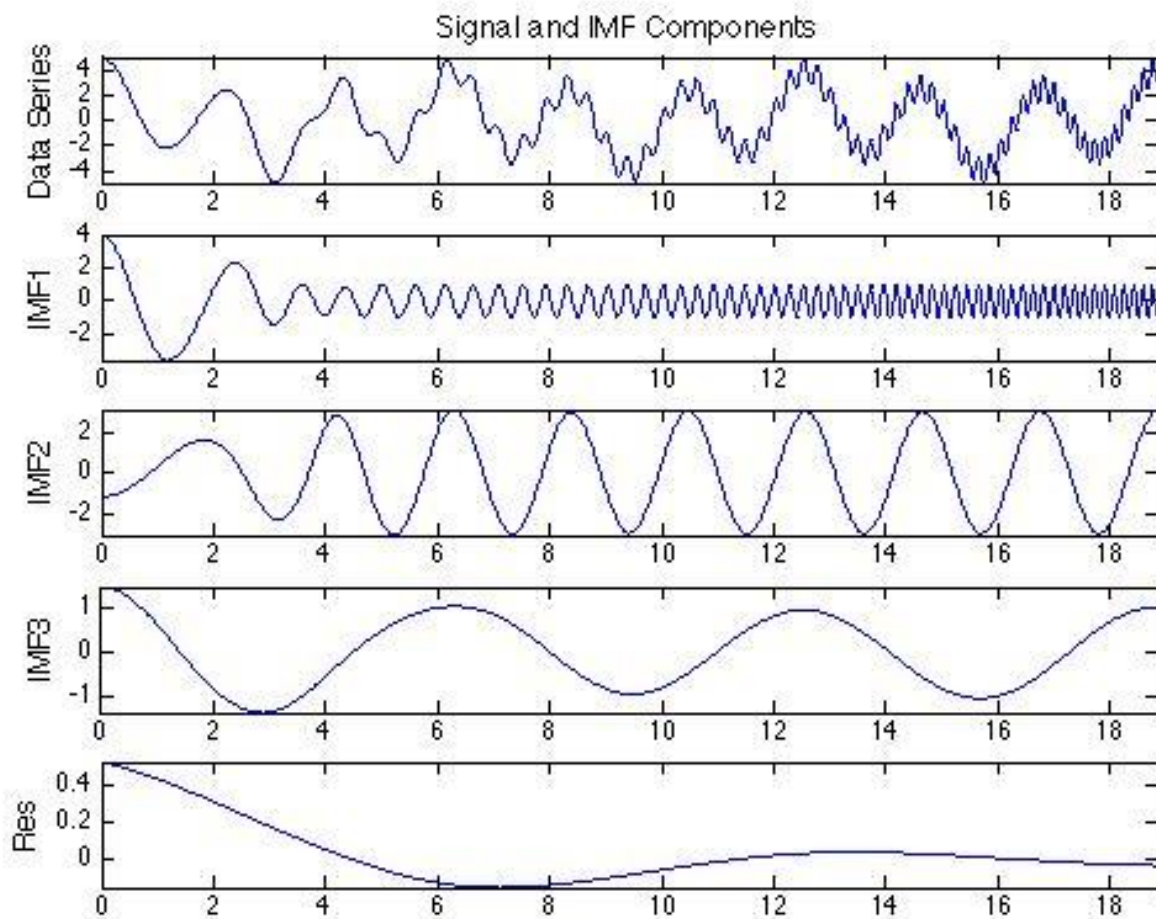
Residue = Residue - IMF_k

$k = k + 1$

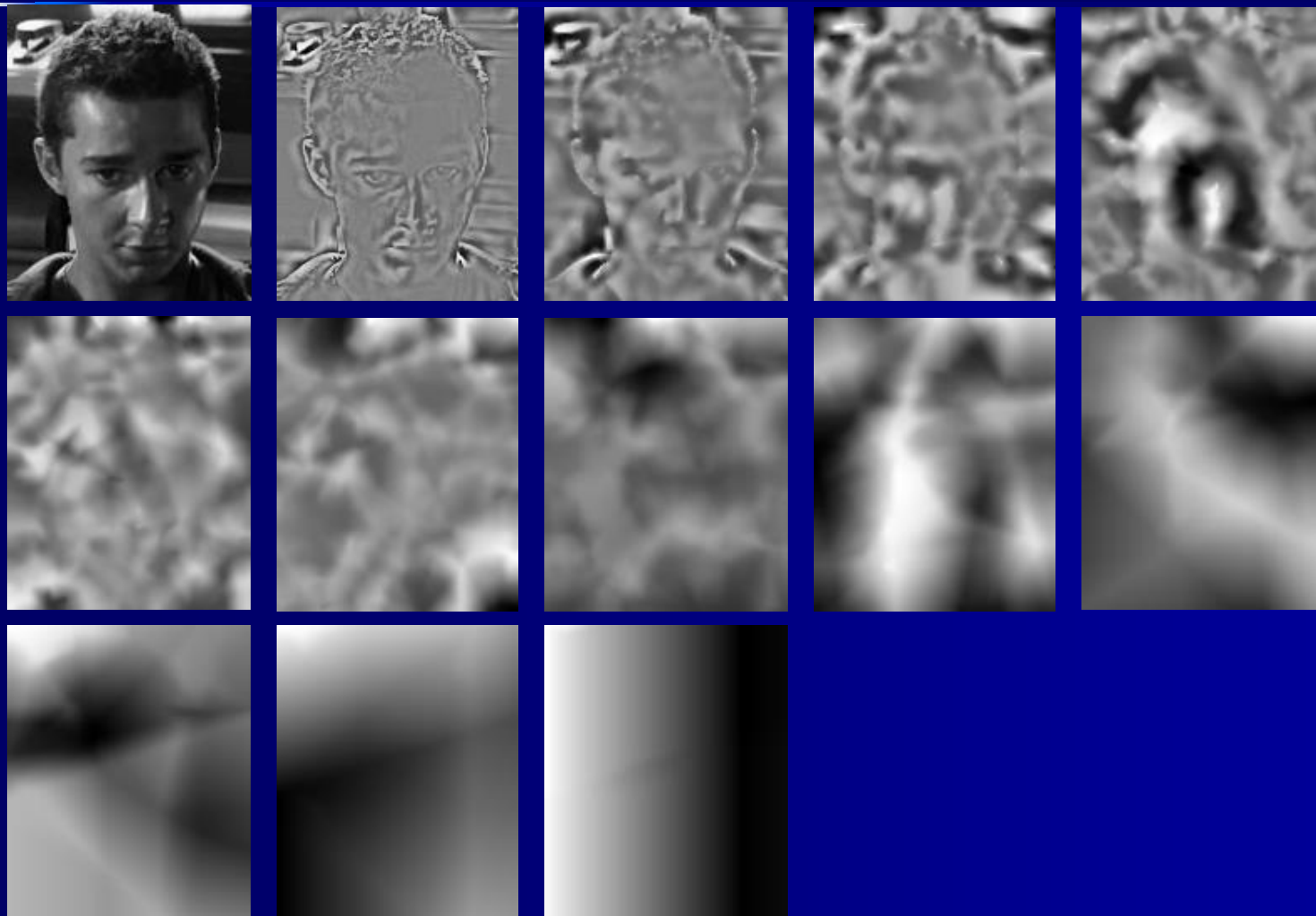
end



Результат разложения



EMD для изображений



Коррекция освещённости

Раскладываем исходное изображение с помощью EMD:

$$I(i, j) = \sum_{k=1}^N \psi_k(i, j) + r(i, j)$$

Для восстановления результата используем лишь несколько первых IMF:

$$I_{res}(i, j) = \sum_{k=1}^M \psi_k(i, j), \quad M < N$$



$N = 11; M = 9$

Свойства преобразования Фурье

1D

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

2D

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

	Свойства	Функция	Преобразование Фурье
		$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
Обратное преобразование		$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
	Свертка	$f_1 \star f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$
	Умножение	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \hat{f}_1 \star \hat{f}_2(\omega)$
	Сдвиг	$f(t - u)$	$e^{-i\omega u} \hat{f}(\omega)$
	Модуляция	$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
	Масштабирование	$f(t/s)$	$ s \hat{f}(s\omega)$
Производная по времени		$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p \hat{f}(\omega)$
Производная по частоте		$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Комплексное сопряжение		$f^*(t)$	$\hat{f}^*(-\omega)$
Эрмитова симметрия		$f(t) \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$

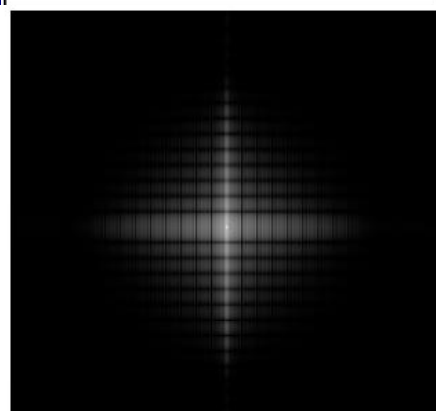
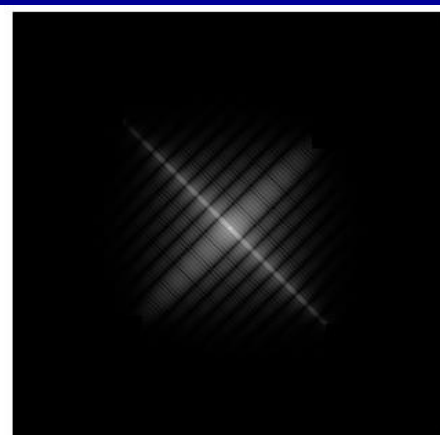
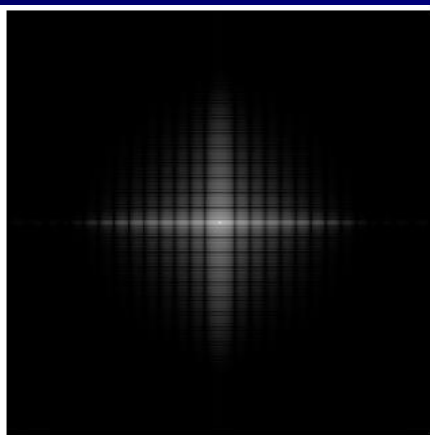
Rotation

If we introduce the polar coordinates

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \phi \quad v = \omega \sin \phi$$

then $f(x, y)$ and $F(u, v)$ become $f(r, \theta)$ and $F(\omega, \phi)$, respectively. Direct substitution in the continuous Fourier transform pair yields

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$



Proof

Convert to polar coordinates:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & dx dy &= r dr d\theta \\u &= \omega \cos \phi & v &= \omega \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(\omega, \phi) &= \mathcal{F}\{f(r, \theta)\} \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r f(r, \theta) \exp[-j2\pi\omega r (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)] dr d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r f(r, \theta) \exp[-j2\pi\omega r \cos(\theta - \phi)] dr d\theta\end{aligned}$$

Rotate $f(r, \theta)$ by θ_0 :

$$\begin{aligned}F'(\omega, \phi) &= \mathcal{F}\{f(r, \theta + \theta_0)\} \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r f(r, \theta + \theta_0) \exp[-j2\pi\omega r \cos(\theta - \phi)] dr d\theta\end{aligned}$$

Let $\lambda = \theta + \theta_0$

$$\begin{aligned}F'(\omega, \phi) &= \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \int_0^\infty r f(r, \lambda) \exp[-j2\pi\omega r \cos(\lambda - \theta_0 - \phi)] dr d\lambda \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r f(r, \lambda) \exp[-j2\pi\omega r \cos(\lambda - (\theta_0 + \phi))] dr d\lambda\end{aligned}$$

i.e.,

$$F'(\omega, \phi) = F(\omega, \phi + \theta_0)$$

or

$$f(r, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$

Определённый интеграл. Определённый интеграл от функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен значению преобразования Фурье в 0.

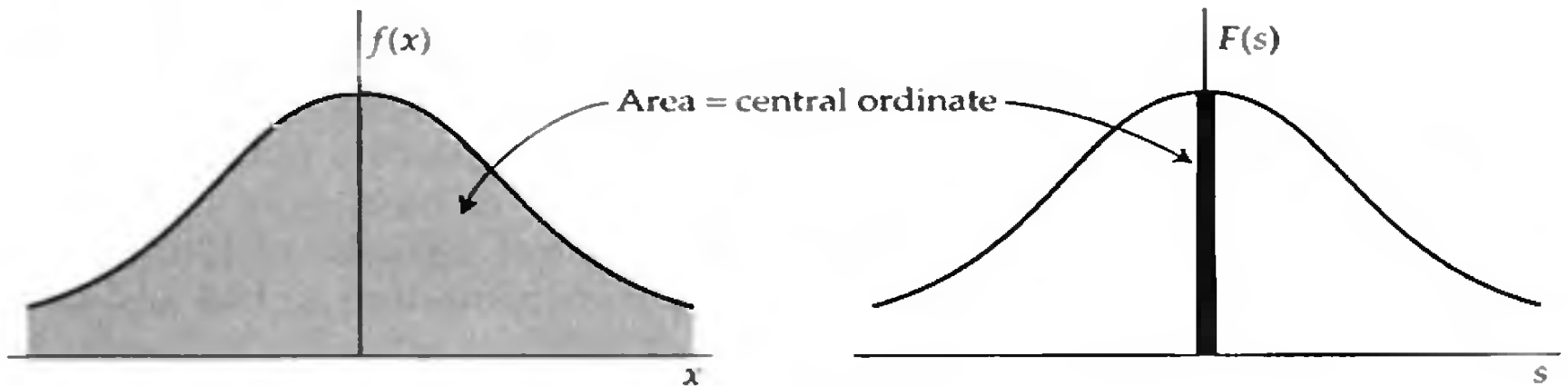
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(0), \quad (f \doteq F)$$

Вывод

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx \Big|_{s=0} = F(0).$$

Из симметрии преобразования Фурье следует $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(0)$$



Теорема. Если функции f и h принадлежат $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w) dw,$$

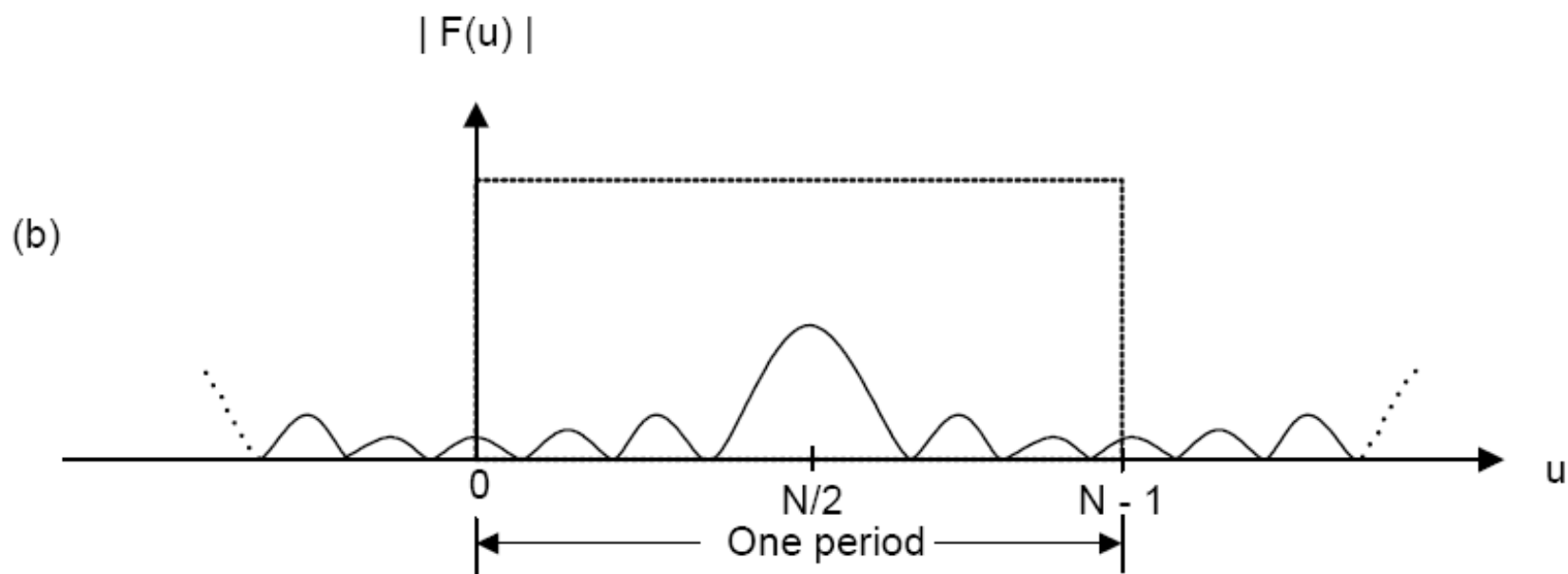
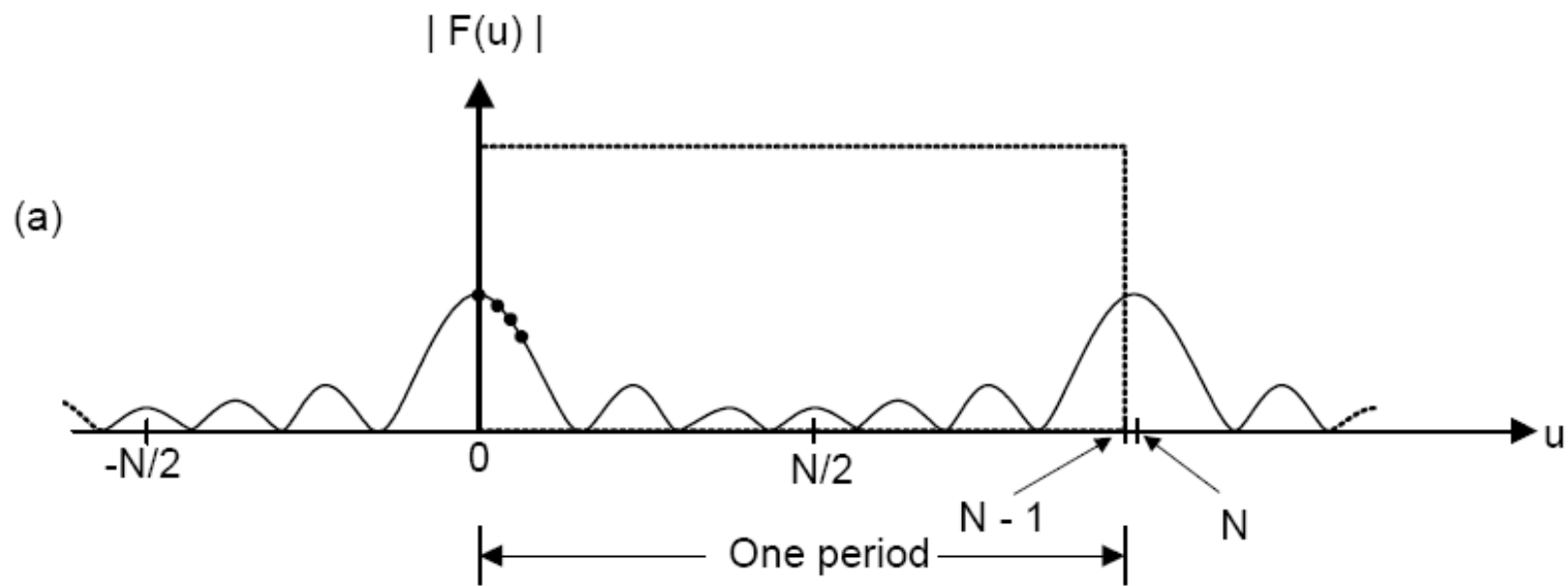
при $h = f$ из этого следует

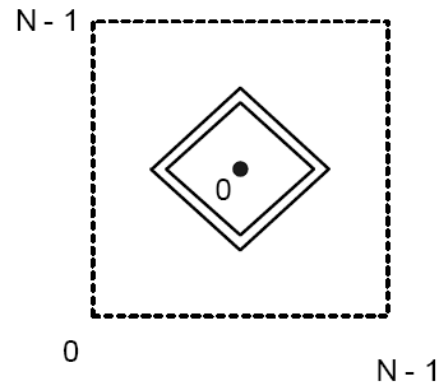
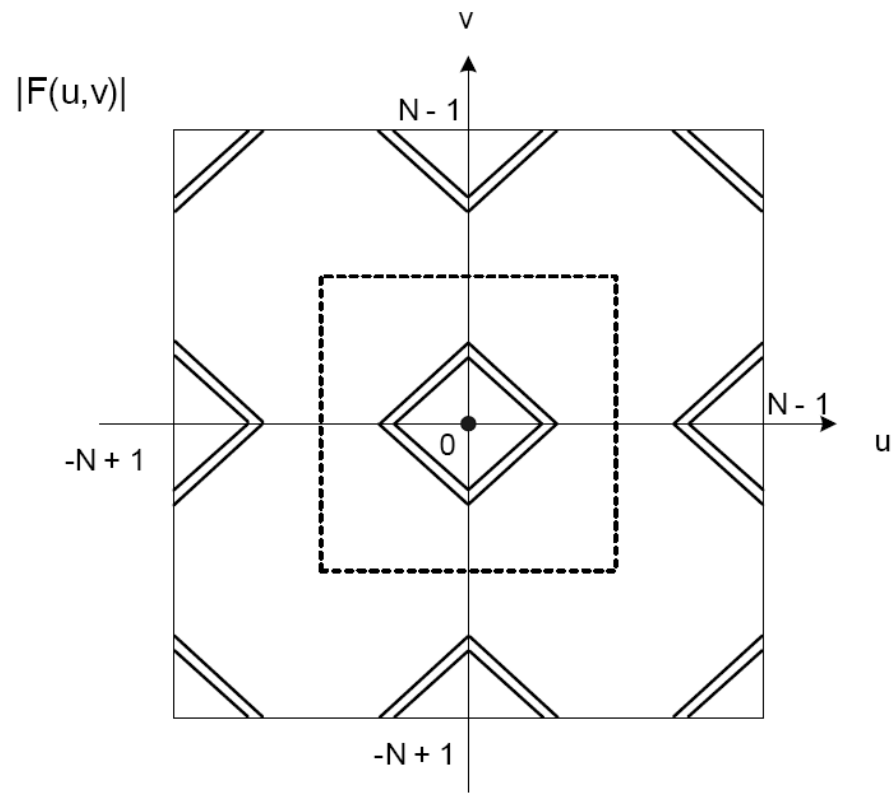
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw.$$

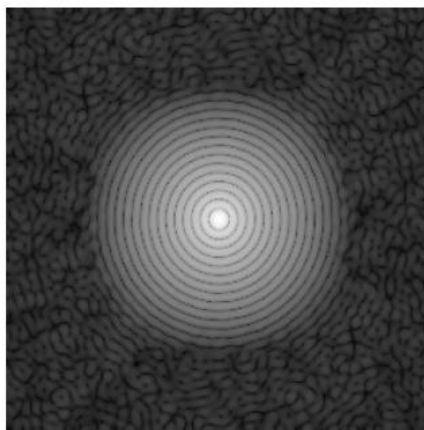
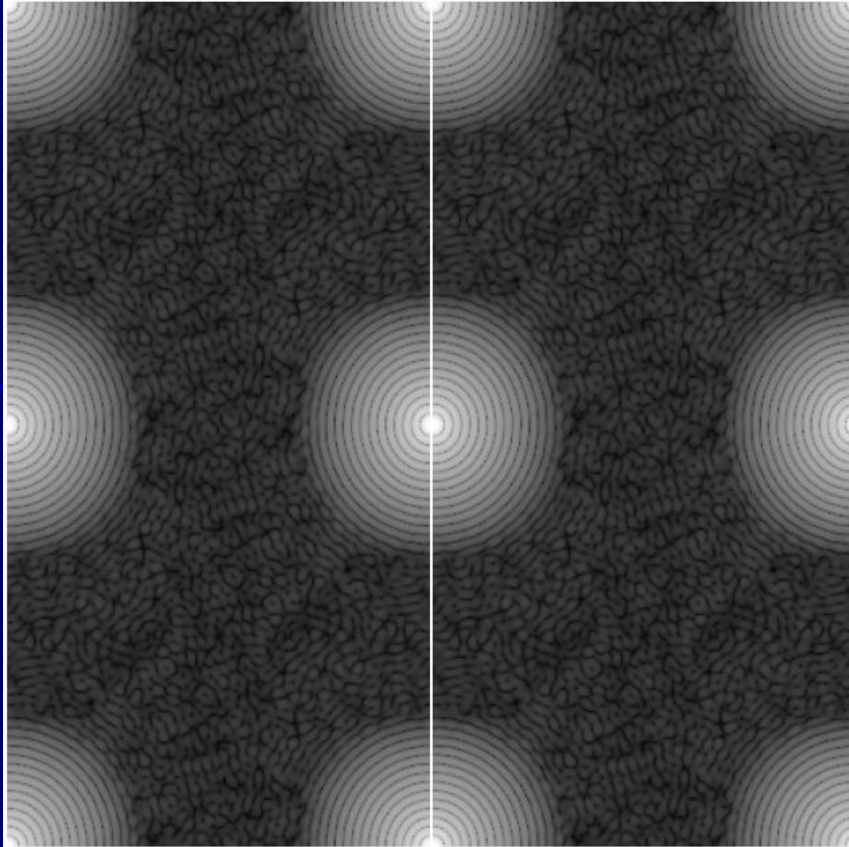
Доказательство. Пусть $g = f * \bar{h}$, где $\bar{h}(t) = h^*(-t)$.

$$\hat{g}(w) = \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t) dt = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w) dw.$$







Теорема. Если $f \neq 0$ имеет компактный носитель, то $\hat{f}(w)$ не может иметь компактного носителя. Аналогично, если $\hat{f}(w)$ имеет компактный носитель, то $f(t)$ не может иметь компактного носителя.

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, так как второе следует из первого с помощью преобразования Фурье. Если \hat{f} имеет компактный носитель, содержащийся в $[-b, b]$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) e^{iwt} dw.$$

Если $f(t) = 0$ при $t \in [c, d]$, то дифференцируя n -раз под знаком интеграла, получим в точке $t_0 = (c + d)/2$

$$f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) (iw)^n e^{iwt_0} dw = 0.$$

Так как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) e^{iw(t-t_0)} e^{iwt_0} dw,$$

то разложение $e^{iw(t-t_0)}$ в бесконечный ряд дает для всех $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[i(t-t_0)]^n}{n!} \int_{-b}^b \hat{f}(w) w^n e^{iwt_0} dw = 0.$$

Это противоречит нашему предположению, что $f \neq 0$.

Первый момент.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{F'(0)}{-2\pi i}.$$

Выводится из теоремы о производной

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi x i) f(x) e^{-i2\pi x s} dx = F'(s).$$

Центроид.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}.$$

$\langle x \rangle$ можно рассматривать как центр масс стержня с распределением плотности $f(x)$, или как время сигнала, если рассматривать функцию $f(t)$ как зависимость энергии сигнала от времени.

Связь центроида с преобразованием Фурье:

$$\langle x \rangle = -\frac{F'(0)}{2\pi i F(0)}.$$

Второй момент (момент инерции).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{F''(0)}{-4\pi^2}.$$

Выводится из теоремы о производной

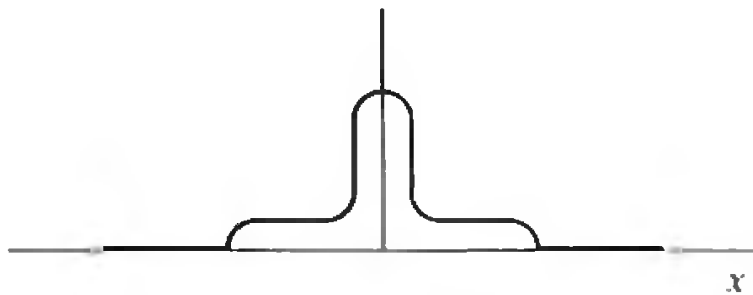
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi xi)^2 f(x) e^{-i2\pi xs} dx = F''(s).$$

Моменты.

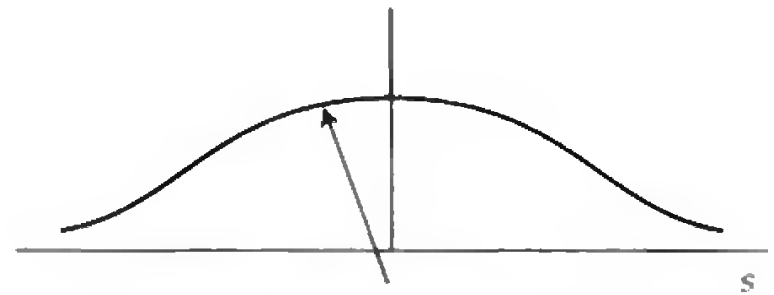
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}.$$

Инерция (второй момент)

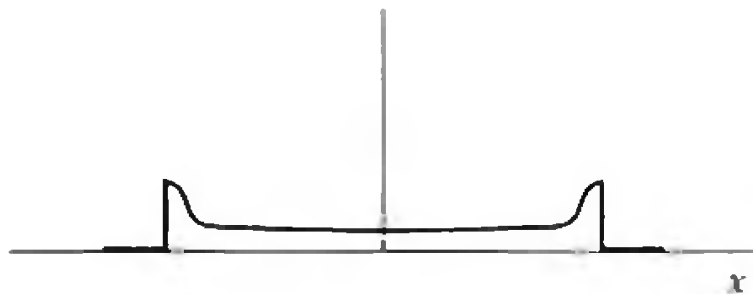
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$



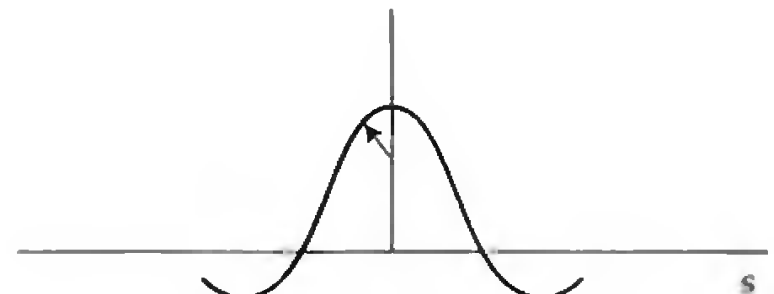
Low moment of inertia



Low central curvature



High moment of inertia



High central curvature

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}.$$

$$\langle x^2 \rangle_{f+g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g + 2 \frac{F'(0)}{2\pi i F(0)} \frac{G'(0)}{2\pi i G(0)}.$$

Взяв $g = \delta(x - a)$ получим

$$\langle x^2 \rangle_{f(x-a)} = \langle x^2 \rangle_f + a^2.$$

Дисперсия.

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{(F'(0))^2}{4\pi^2 (F(0))^2}.$$

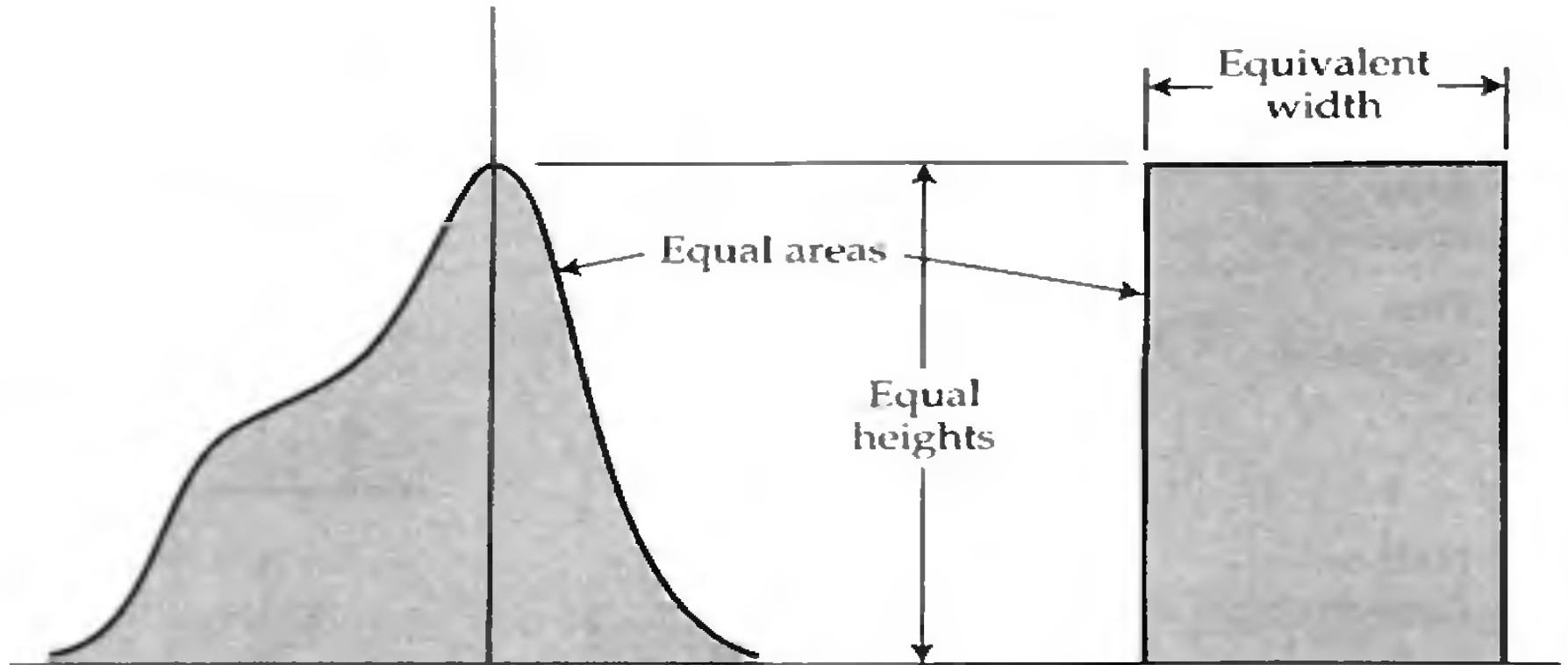
$$\sigma_{f+g}^2 = \sigma_f^2 + \sigma_g^2.$$

Ширина локализации.

$$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds} = \frac{1}{W_F}.$$

Эквивалентная ширина

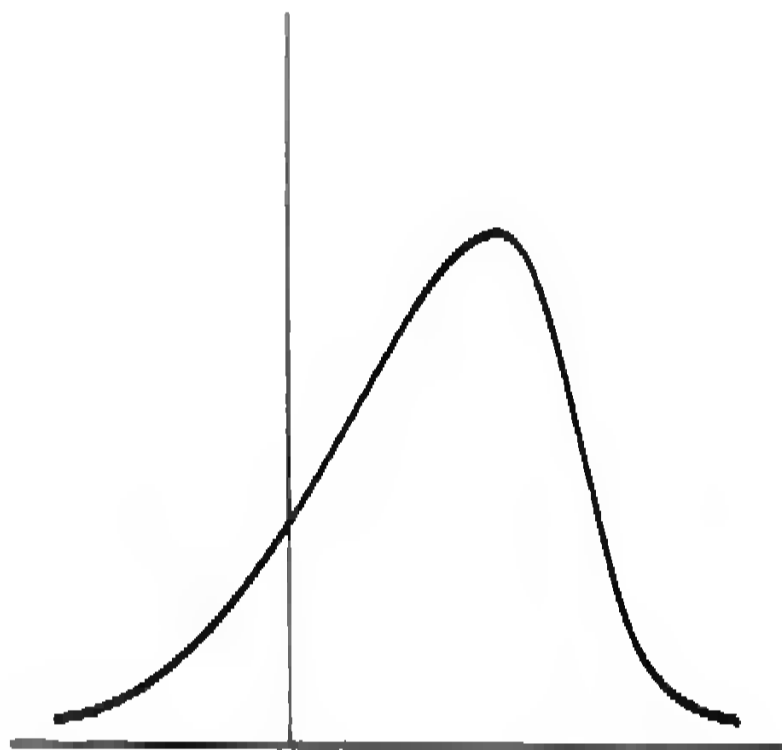
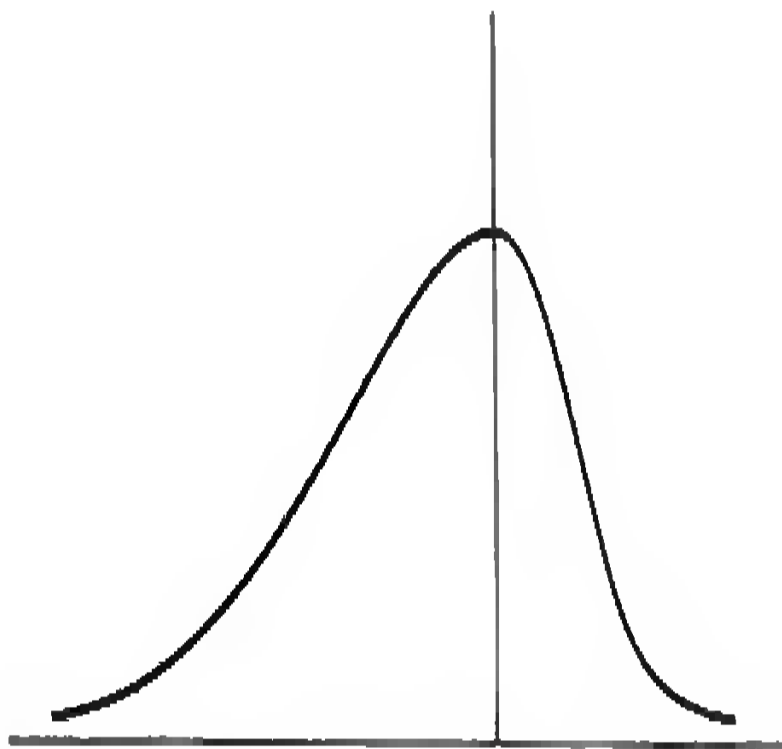
$$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}{f(0)}$$



The "equivalent width" of a function.

Автокорреляционная ширина

$$W_{f^* * f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f^* * f) dx}{f^* * f|_0}$$



Некоторые неравенства. $|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)| ds$ выводится из

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{i2\pi xs} ds. \text{ Аналогично } |f'(x)| \leq 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |sF(s)| ds.$$

Неравенство Шварца. Для действительных функций

$$\left[\int g(x)f(x) dx \right]^2 \leq \int g^2(x) dx \int f^2(x) dx.$$

Для комплексных функций:

$$\left[\int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x)) dx \right]^2 \leq 4 \int gg^*(x) dx \int ff^*(x) dx$$

Доказательство. Пусть ε -действительная константа

$$0 < \int (f(x) + \varepsilon g(x))(f(x) + \varepsilon g(x))^* dx.$$

$$0 < \int f(x)f(x)^* dx + \varepsilon \int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x)) dx + \varepsilon^2 \int g(x)g(x)^* dx.$$

В правой части неравенства стоит полином 2й степени относительно ε : $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$. для выполнения неравенства необходимо $b^2 - 4ac < 0$, откуда следует н-во Шварца.

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Соотношение неопределённости. Обозначим $(\Delta x)^2$ дисперсию $|f(x)|^2$, а $(\Delta s)^2$ - второй момент $|F(s)|^2$.

$$(\Delta x)^2(\Delta s)^2 \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Для доказательства понадобится неравенство Шварца, формула $\int f' f'^* dx = 4\pi^2 \int s^2 F F^* ds$ и формула интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2(\Delta s)^2 &= \frac{\int x^2 f f^* dx \int s^2 F F^* ds}{\int f f^* dx \int F F^* ds} = \frac{\int x f x f^* dx \int f' f'^* dx}{4\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \geq \\ \frac{|\int x f^* f' + x f f'^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} &= \frac{|\int x d(f f^*)|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} = \frac{|\int f f^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} = \frac{1}{16\pi^2}. \end{aligned}$$